Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 26, núm. 2, 2011. Pàg. 103–136. DOI: 10.2436/20.2002.01.36

El gran teorema de la combinatòria moderna

Marc Noy

Resum: Si pregunteu a un expert quin és el resultat estrella de la combinatòria de les últimes dècades, és probable que contesti: el teorema dels menors de Robertson i Seymour. Aquest resultat, una de les grans fites de la matemàtica del segle passat, afirma el següent: si $\mathcal{G}$ és una classe de grafs tancada per menors, llavors hi ha un nombre *finit* d'obstruccions que determinen si un graf és a $\mathcal{G}$. L'exemple clàssic és el teorema de Kuratowski: si $\mathcal{G}$ és la classe dels grafs planaris, les obstruccions són els grafs K_5 i $K_{3,3}$. La prova ocupa uns vint articles, amb un total de més de cinc-centes pàgines. En aquest treball expliquem el contingut del teorema i donem una idea de les seves implicacions, de les relacions amb l'algorísmia i amb la lògica, de les eines fonamentals a què ha donat lloc i de la seva demostració.

Paraules clau: graf planari, grafs en superfícies, menors en grafs, amplada d'arbre, complexitat computacional.

Classificació MSC2010: 05C83.

1 Introducció

El clàssic teorema de Kuratowski [33] de l'any 1930 diu que un graf és *planari* si, i només si, no conté cap subdivisió de K_5 ni de $K_{3,3}$. En aquell temps la teoria de grafs estava tot just en els seus inicis i Kuratowski presenta el seu teorema com un resultat de topologia: els grafs són 1-complexos i una subdivisió d'un graf G és un un graf homeomorf a G com a 1-complex. Kuratowski prova que les úniques obstruccions minimals a la planaritat són els 1-complexos (grafs) homeomorfs a K_5 o $K_{3,3}$.

Amb el temps es va veure que el teorema de Kuratowski era un resultat bàsic de la teoria de grafs, ja que donava una caracterització purament combinatòria de la planaritat. Després van sorgir moltes altres caracteritzacions

Aquest article està basat parcialment en la conferència de l'autor a la 14a Trobada Matemàtica de la SCM, que va tenir lloc el 20 de maig de 2011.

dels grafs planaris: algebraiques (Mac Lane), en termes de dualitat (Whitney), de matroides (Tutte) o, més recentment, en termes de la dimensió d'ordres parcials (Schnyder). És notable com la planaritat es pot caracteritzar amb propietats que no són, aparentment, topològiques o geomètriques.

Dir que un graf és planari és el mateix que dir que es pot dibuixar en l'esfera sense creuaments d'arestes. Tenim caracteritzacions per a altres superfícies? Van haver de passar cinquanta anys per trobar-ne una altra: Archdeacon va provar [3] que hi ha exactament 103 obstruccions per dibuixar un graf en el pla projectiu. Un graf és una obstrucció per a una superfície S si no té vèrtexs de grau dos, no es pot dibuixar a S i qualsevol subgraf propi pot dibuixar-se a S. Amb aquesta definició, un graf es pot dibuixar a S si, i només si, no conté cap obstrucció com a subgraf. Per al tor sabem que hi ha milers d'obstruccions, però només tenim la llista completa per a l'esfera i el pla projectiu. Sabem, però, que per a cada superfície hi ha un nombre *finit* d'obstruccions, encara que no sabem trobar-les totes. Aquest resultat, provat primer per a superfícies no orientables [4] i poc després per a qualsevol superfície [49], és un cas particular important del teorema dels menors que presentem ara.

La contracció d'una aresta $e = xy$ d'un graf G consisteix a identificar els extrems x i y, eliminant les possibles arestes múltiples que s'hagin produït. Direm que H és un menor de G si H es pot obtenir a partir d'un subgraf de G contraient arestes. Una classe de grafs $\mathcal{G}$ és tancada per menors si sempre que G és a $\mathcal{G}$ i H és un menor de G, llavors H també és a $\mathcal{G}$. Per exemple, la classe dels grafs planaris és tancada per menors, ja que suprimint o contraient una aresta no es perd la planaritat. Pel mateix motiu ho és la classe dels grafs que es poden dibuixar en una superfície donada.

Si $\mathcal{G}$ és una classe tancada per menors, direm que H és un menor exclòs de $\mathcal{G}$ si H no és a $\mathcal{G}$, però suprimint o contraient qualsevol aresta de H el graf resultant és a $\mathcal{G}$. Si un graf conté H com a menor, no pot ser a $\mathcal{G}$; és a dir, H és una obstrucció per ser a $\mathcal{G}$ (una obstrucció d'una mena més general que les subdivisions). És fàcil veure que un graf és a $\mathcal{G}$ si, i només si, no conté cap menor exclòs com a menor. La qüestió clau és saber quins són els menors exclosos d'una classe i quants n'hi ha. El teorema fonamental de Robertson i Seymour diu:

> Teorema dels menors. *Per a qualsevol classe de grafs tancada per menors hi ha un nombre finit de menors exclosos.*

Aquest resultat va ser conjecturat per Klaus Wagner (1910–2000). La prova és llarga i complexa, i fa servir eines molt diverses, algunes de les quals van ser introduïdes precisament per provar el teorema. L'any 1985, poc després d'aparèixer el primer article de la sèrie [45], els autors escrivien a les actes d'un congrés [46]:

> *En el moment d'escriure aquest article creiem haver resolt la conjectura completament, però les demostracions encara no han estat escrites amb detall ni comprovades.*

Van haver de passar anys abans no se'n publiquessin tots els detalls. La prova ocupa vint articles, l'últim dels quals [52] va ser publicat el 2004. En aquest treball intentarem donar les idees principals de la prova i de les eines desenvolupades per arribar al resultat.

A més dels grafs en superfícies, hi ha altres exemples interessants de classes tancades per menors. És evident que qualsevol graf es pot dibuixar en l'espai $\mathbb{R}^3$ sense que les arestes es tallin, però podem demanar propietats addicionals. Diem que una immersió d'un graf G a $\mathbb{R}^3$ és sense nusos si qualsevol cicle de G, considerat com a corba tancada a $\mathbb{R}^3$, determina un nus trivial. Per exemple, K_7 no admet cap immersió sense nusos.[1] La propietat és tancada per menors, ja que la contracció o supressió d'arestes no pot crear nusos que abans no hi eren. De fet, K_7 és un menor exclòs; se'n coneixen alguns més, però no gaires. Una de les conseqüències més espectaculars del teorema de Robertson i Seymour és que, donada una classe $\mathcal{G}$ tancada per menors, hi ha un algorisme polinomial per reconèixer si un graf és a $\mathcal{G}$. Per tant, sabem que existeix un algorisme polinomial per decidir si un graf admet una immersió a $\mathbb{R}^3$, però no tenim cap algorisme efectiu, ni tan sols exponencial. Més endavant discutirem aquesta paradoxa aparent.

Un graf és sèrie-paral·lel si es pot reduir a un graf sense arestes mitjançant les operacions següents: suprimir una aresta doble; contreure una aresta incident a un vèrtex de grau dos; suprimir vèrtexs de grau u. És senzill veure que la classe de grafs sèrie-paral·lels és tancada per menors i que l'únic menor exclòs és K_4. També es pot veure que els grafs sèrie-paral·lels són precisament els que tenen amplada d'arbre com a molt dos. Aquest paràmetre bàsic va ser introduït per Robertson i Seymour a la prova del seu teorema i captura la idea de descompondre un graf en parts petites en forma d'arbre. La classe de grafs amb amplada d'arbre com a molt k és tancada per menors. Coneixem la llista completa de menors exclosos només per a $k = 1$ (la classe corresponent és la dels grafs acíclics i el menor exclòs és, trivialment, el triangle), $k = 2$ (grafs sèrie-paral·lels i només hi ha K_4) i $k = 3$ (n'hi ha quatre, entre aquests K_5 i el graf de l'octaedre).

Un fet molt notable és que molts problemes algorísmics NP-complets esdevenen factibles per a grafs amb amplada d'arbre fitada per una constant. Per exemple, el problema de decidir si existeix un cicle hamiltonià o el de decidir si existeix una 3-coloració es poden resoldre en temps lineal per a grafs amb amplada d'arbre fitada. Més encara, qualsevol problema de decisió que es pugui expressar en lògica monàdica de segon ordre (lògica de primer ordre enriquida amb quantificadors sobre conjunts de vèrtexs i d'arestes) admet un algorisme lineal. Aquest és el famós teorema de Courcelle [14], que ha donat lloc a una rica àrea de recerca on es troben la combinatòria, l'algorísmia i la lògica.

Una altra classe important de grafs és la següent. L'operació ΔY en un graf consisteix a suprimir un triangle $v_1v_2v_3$, afegir un nou vèrtex v_4 i fer-lo adjacent a v_1, v_2 i v_3. L'operació $Y\Delta$ és la inversa de ΔY, eliminar un vèrtex

1 A diferència del fet que K_5 no és planari, aquest no és un resultat senzill [13].

de grau tres i afegir totes les arestes entre els seus veïns. Un graf es diu ΔY reductible si es pot reduir a un graf sense arestes mitjançant les operacions ΔY, $Y\Delta$, i les tres operacions sèrie-paral·lel definides abans. Els grafs planaris són ΔY reductibles[2], però n'hi ha molts més, per exemple K_5. La propietat de ser ΔY reductible és tancada per menors; no coneixem tots els menors exclosos, però sabem que n'hi ha més de 10^{10}, una quantitat considerable [68].

La resta de l'article s'estructura així. Comencem pel clàssic teorema de Kuratowski que caracteritza els grafs planaris i després passem a estudiar grafs en superfícies. A continuació, expliquem el concepte de *menors* en grafs i el contingut del teorema dels menors. Després d'introduir el concepte d'*amplada d'arbre* d'un graf, donem algunes idees sobre la prova del teorema. Tot seguit discutim connexions de la teoria de grafs amb la lògica i l'algorísmia i acabem revisant altres aspectes de la teoria.

Hi ha diversos articles panoràmics que el lector pot consultar per aprofundir més en el tema. Esmentem els de Lovász [34] (que ha guiat la nostra exposició), Thomas [60], Kawarabayashi i Mohar [30, 37] i Richter [42]. També es pot consultar amb profit els llibres de Diestel [16, cap. 12], Mohar i Thomassen [38, cap. 6 i 7] i Downey i Fellows [17, cap. 6 i 7].

2 El teorema de Kuratowski

Kazimierz Kuratowski (1896–1980) va ser un dels grans exponents de l'escola matemàtica polonesa del segle passat, juntament amb altres noms com Banach, Ulam, Tarski, Borsuk o Sierpiński. És conegut pels seus importants resultats sobre topologia general, però segurament encara ho és més pel teorema que duu el seu nom.

Teorema 1 (Kuratowski [33]). *Un graf és planari si, i només si, no conté una subdivisió de K_5 o de $K_{3,3}$.*

Recordem que un graf és planari si es pot dibuixar en el pla sense que es creuin dues arestes en un punt interior. L'operació de subdividir una aresta consisteix a inserir-hi un vèrtex de grau dos: més formalment, s'elimina l'aresta xy i es crea un nou vèrtex adjacent únicament a x i a y. Un graf G és una subdivisió d'un graf H si G s'obté a partir de H subdividint arestes repetidament. És clar que G és planari si, i només si, qualsevol subdivisió de G és planari.

Recordem també que K_n és el graf complet amb n vèrtexs (tots els parells de vèrtexs són adjacents) i $K_{n,m}$ és el graf bipartit complet amb parts de mides n i m (tot vèrtex de la primera part és adjacent a tot vèrtex de la segona part). La figura 1 mostra els dos grafs de Kuratowski K_5 i $K_{3,3}$, i algunes subdivsions. És fàcil veure que K_5 no és planari. En efecte, dibuixem primer un cicle $v_1v_2v_3v_4v_5$

2 Un resultat gens trivial, provat per primer cop per Epifanov [19]. Es pot trobar una prova moderna a [69] que es fa servir per provar el teorema de Steinitz, segons el qual tot graf planari 3-connex és l'esquelet d'un poliedre a $\mathbb{R}^3$.

com un polígon simple. El teorema de la corba de Jordan ens assegura que no podem traçar les cinc cordes que falten sense produir un creuament. El mateix argument val per a $K_{3,3}$: dibuixem un cicle $v_1v_2v_3v_4v_5v_6$ i veiem que no podem traçar les tres cordes v_1v_4, v_2v_5, v_3v_6 que falten sense creuaments. La part

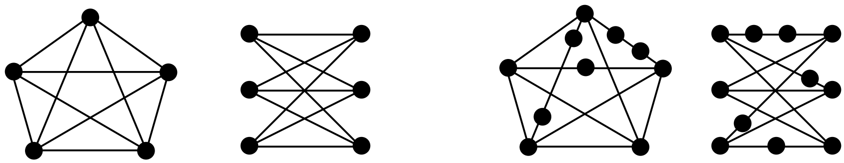

FIGURA 1: Els grafs de Kuratowski K_5 i $K_{3,3}$, i algunes subdivisions.

difícil del teorema de Kuratowski és, naturalment, el recíproc: provar que les subdivisions de K_5 i de $K_{3,3}$ són les úniques obstruccions a la planaritat. La prova que donem a continuació va ser formulada per Thomassen [38].[3] Abans calen alguns preliminars de teoria de grafs.

Diem que un graf G és k-connex si el graf $G - X$ obtingut suprimint els vèrtexs de X és connex per a qualsevol conjunt de vèrtexs X amb $|X| < k$. En altres paraules, si dos vèrtexs de G no poden ser separats per menys de k vèrtexs. Si $G - X$ no és connex i $|X| = t$, diem que X és un t-separador. Un vèrtex de tall és un 1-separador.

La primera observació és que n'hi ha prou de provar el teorema de Kuratowski per a grafs 3-connexos. En efecte, sigui G un graf que no conté subdivisions de K_5 ni de $K_{3,3}$. Suposem que G no és 3-connex i sigui $\{x, y\}$ un 2-separador de G. Sigui H una component de $G - X$, a la qual hem afegit els vèrtexs x i y i l'aresta xy, en cas que no hi fos. És clar que H tampoc no conté una subdivisió de K_5 ni de $K_{3,3}$. Si H no és 3-connex, iterem el procés i considerem un nou 2-separador. Eventualment arribem a les anomenades *components 3-connexes de G*, que seran planaris per hipòtesi. Ara és fàcil veure que si dos grafs són planaris i els unim per una aresta el graf resultant també és planari. El mateix raonament és vàlid si hi ha un 1-separador.

Per provar el teorema en el cas 3-connex, ens cal un resultat previ. Donada una aresta $e = xy$ d'un graf G, denotem per G/e el graf obtingut en contreure[4] l'aresta e. Denotem per v_{xy} el vèrtex resultant de la contracció. Una prova senzilla del resultat següent, donada també per Thomassen, es troba a [16].

LEMA 2 (TUTTE). *Tot graf 3-connex G conté una aresta e tal que G/e és 3-connex.*

3 Carsten Thomassen (1948–), professor a la Universitat Tècnica de Dinamarca, és un dels grans especialistes en teoria topològica de grafs. A més de ser autor d'importants contribucions originals, destaca per les seves demostracions concises i brillants de resultats clàssics.

4 La notació G/e prové del fet que la contracció d'un element d'una matroide vectorial correspon a fer un quocient del corresponent espai vectorial.

Prova (del teorema de Kuratowski per a grafs 3-connexos). Sigui G un graf 3-connex que no conté subdivisions de K_5 ni de $K_{3,3}$. Pel lema 2, existeix una aresta xy tal que G/xy també és 3-connex. El graf G/xy tampoc no conté subdivisions de K_5 ni de $K_{3,3}$. Per inducció sobre el nombre de vèrtexs, el graf $H = G/xy$ admet un dibuix planari. Sigui f la cara de $H - \{v_{xy}\}$ que conté el punt v_{xy} i sigui C la frontera de f (ja que $H - \{v_{xy}\}$ és 2-connex, C és una corba simple). Ara recol·loquem x, y i l'aresta que els uneix a l'interior de f. Els veïns de x a G han de ser necessàriament a C: siguin aquests veïns $x_1, \dots, x_k$, en ordre cíclic.

Considerem ara els veïns de y, que també són a C. Si són tots en un dels arcs definits per dos x_i consecutius, podem completar G mantenint la planaritat. Altrament, només hi ha dos possibles obstacles: que y sigui adjacent a tres dels x_i, i en aquest cas s'obté una subdivisió de K_5; que y sigui adjacent a dos dels x_i no consecutius, i llavors obtenim una subdivisió de $K_{3,3}$.

La prova anterior pot adaptar-se per tal de produir un dibuix de G en el pla en què totes les cares internes són convexes, un altre resultat donat per Tutte.[5] En particular, les arestes són segments rectilinis i obtenim el resultat següent.

Teorema 3 (Fáry). *Tot graf planari pot dibuixar-se en el pla amb arestes rectilínies.*

Prova. Sigui G un graf planari. Afegint arestes repetidament a l'interior de les cares de G arribem a un graf T en el qual totes les cares són triangles. Es pot veure que T és 3-connex i, per tant, admet un dibuix rectilini. El mateix passa llavors amb G, que és un subgraf de T. □

3 Grafs en superfícies

Dibuixar un graf en el pla és el mateix que dibuixar-lo en l'esfera, mitjançant una projecció estereogràfica. És natural, doncs, preguntar-se per representacions de grafs en altres superfícies. Per exemple, K_6 pot dibuixar-se en el pla projectiu i K_7 pot dibuixar-se en el tor, tal com mostra la figura 2. L'estudi de grafs en superfícies és actualment un tema de recerca molt actiu [38]. A continuació discutim alguns aspectes de la teoria, en particular els anàlegs del teorema de Kuratowski per a superfícies diferents de l'esfera.

La fórmula d'Euler

$$v - a + c = 2,$$

que relaciona el nombre v de vèrtexs, a d'arestes i c de cares d'un graf planari connex, es generalitza en qualsevol superfície. Per brevetat, ens limitarem al cas orientable; el cas no orientable es tracta de manera similar. Sigui S_g la

5 William Tutte (1917–2002) va ser un dels grans matemàtics del segle xx. Les seves contribucions a la combinatòria i la teoria de grafs són moltes i molt profundes. Menys coneguda és la seva activitat durant la Segona Guerra Mundial, època en què va aconseguir desxifrar el codi de l'Alt Comandament alemany [65].

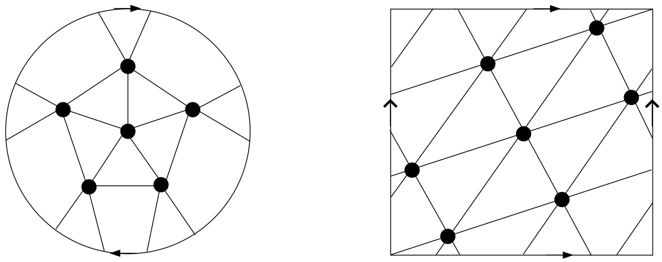

FIGURA 2: Dibuix de K_6 en el pla projectiu i de K_7 en el tor.

superfície compacta i sense vora de gènere g, és a dir, l'esfera amb g nanses. Una immersió d'un graf G a S_g és diu 2-cel·lular si totes les cares són contràctils, és a dir, homeomorfes a un disc.

PROPOSICIÓ 4 (FÓRMULA D'EULER). *Donada una immersió 2-cel·lular d'un graf G a S_g, els nombres de vèrtexs, arestes i cares satisfan*

$$v - a + c = 2 - 2g.$$

En conseqüència, tenim que

$$a \leq 3v - 6 + 6g.$$

Si G no té triangles, llavors

$$a \leq 2v - 4 + 4g.$$

PROVA. El cas $g = 0$ és la clàssica fórmula d'Euler per a grafs planaris. Suposem $g > 0$. Sigui C una corba tancada de S_g que dóna una volta a una nansa i que no conté vèrtexs de G. La corba C ha de tallar alguna aresta de G, ja que altrament C seria a una cara no contràctil. Redibuixant el graf, si cal, podem suposar que el nombre d'interseccions de C amb arestes de G és finit, diguem-ne $k > 0$. A cada una de les k interseccions afegim un vèrtex nou i convertim en una nova aresta cada arc de C i cada arc d'una aresta entre dos vèrtexs nous. Sigui G' el graf resultant, que té $v + k$ vèrtexs, $a + 2k$ arestes i $c + k$ cares. Ara tallem la nansa a través de C i creem una superfície de gènere $g - 1$ afegint un disc a l'interior de cada una de les dues còpies de C. El graf G' s'ha convertit en un nou graf G'', que té $v + 2k$ vèrtexs, $a + 3k$ arestes i $c + k + 2$ cares. Per inducció tenim

$$(v + 2k) - (a + 3k) + (c + k + 2) = 2 - 2(g - 1),$$

i, per tant, $v - a + c = 2 - 2g$.

Finalment, com que cada cara està limitada com a mínim per tres arestes i cada aresta és incident amb dues cares, obtenim que $2a \geq 3c = 3a - 3v + 6 - 6g$, d'on se segueix la primera desigualtat. Si G no té triangles, cada cara està limitada per almenys quatre arestes i obtenim la segona desigualtat. $\square$

El problema més clàssic dels grafs en superfícies és el de les coloracions. Recordem que el nombre cromàtic $\chi(G)$ d'un graf G és el mínim nombre de colors que calen per acolorir els vèrtexs de manera que vèrtexs adjacents rebin colors diferents. Si G conté K_n com a subgraf, és evident que $\chi(G) \geq n$.

Teorema 5 (Heawood). *Sigui G un graf immers a S_g amb $g > 0$. Llavors*

$$\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48g}}{2} \right\rfloor. \tag{1}$$

Prova. Sigui v el nombre de vèrtexs i a el nombre d'arestes. Afegint arestes si cal, podem suposar que la immersió és 2-cel·lular i, per tant, $a \leq 3v - 6 + 6g$.

N'hi ha prou de provar que existeix un vèrtex v amb grau com a molt

$$\left\lfloor \frac{5+\sqrt{1+48g}}{2} \right\rfloor.$$

En efecte, per inducció $G - \{v\}$ pot acolorir-se amb $\lfloor (7+\sqrt{1+48g})/2 \rfloor$ colors i queda un color lliure per assignar a v. Per provar l'existència d'un tal vèrtex, sigui δ el grau mínim de G. Suposem que $\delta \geq 6$, altrament no hi ha res a demostrar. Atès que no hi ha llaços ni arestes múltiples, $v \geq \delta + 1$. Llavors tenim

$$\delta v \leq 2a \leq 6v - 12 + 12g,$$

i per tant

$$(\delta - 6)(\delta + 1) \leq (\delta - 6)v \leq 12g - 12,$$

o bé

$$\delta^2 - 5\delta + 6 - 12g \leq 0.$$

Deduïm que δ és com a molt l'arrel més gran de l'equació quadràtica $\delta^2 - 5\delta + 6 - 12g = 0$, que és igual a $(5+\sqrt{1+48g})/2$. □

La prova anterior és molt senzilla, el que és realment difícil, contràriament al que va suposar Heawood l'any 1890, és provar que hi ha grafs a S_g que necessiten aquest nombre de colors. Ringel i Youngs [43] van provar, després d'anys d'esforços, que K_n pot dibuixar-se a S_g quan $n = \lfloor (7+\sqrt{1+48g})/2 \rfloor$. D'aquesta manera van resoldre l'anomenat *problema de Heawood*.[6] La figura 2 mostra el graf K_7 en el tor, que correspon al cas $g = 1$; el lector podrà apreciar la dificultat del problema si intenta dibuixar K_8 a S_2 o bé K_9 a S_3.

El gènere $\mathbf{g}(G)$ d'un graf G es defineix com el més petit g tal que G té una immersió a la superfície S_g. Sempre existeix, ja que donada una immersió qualsevol de G en el pla, podem eliminar tots els creuaments afegint-hi prou nanses. Els grafs planaris tenen gènere 0, els grafs no planaris que poden dibuixar-se en el tor, com K_7, tenen gènere 1. És senzill veure que el resultat de Ringel i Youngs és equivalent al següent.

6 L'ampolla de Klein és una excepció, ja que 6 colors són suficients quan la fórmula $\lfloor (7+\sqrt{1+24h})/2 \rfloor$ per a la superfície de gènere no orientable h dóna 7.

TEOREMA 6 (RINGEL-YOUNGS).

$$\mathbf{g}(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil.$$

La prova depèn del valor de n mòdul 12. El cas $n \equiv 7 \pmod{12}$ no és complicat i pot trobar-se a [38]. Hi ha una fórmula semblant per al gènere no orientable (el mínim h tal que un graf pot dibuixar-se en la superfície obtinguda fent la suma connexa de h plans projectius). És interessant notar que és molt més senzill calcular el gènere dels grafs bipartits complets. El graf $K_{n,m}$ té $n + m$ vèrtexs, mn arestes i no té triangles. Si es pot dibuixar s S_g, la proposició 4 implica que $mn \leq 2(m + n) - 4 + 4g$. Per tant

$$g \geq \frac{(n-2)(m-2)}{4}.$$

Aquesta fita senzilla dóna el valor correcte: el lector trobarà a [38] una prova ben curta de la igualtat

$$\mathbf{g}(K_{n,m}) = \left\lceil \frac{(n-2)(m-2)}{4} \right\rceil.$$

El teorema de Heawood per a $g = 0$ seria precisament el *teorema dels quatre colors*. La prova anterior no val en aquest cas: si $g > 0$ podem suposar que $\delta \geq 6$, ja que la part dreta de la desigualtat (1) és com a mínim 7. Si adaptem la prova, veiem que un graf planari és 6-acolorible, ja que existeix un vèrtex de grau com a molt 5. Això és pot millorar fàcilment.

TEOREMA 7 (DELS 5 COLORS). *Tot graf planari G és 5-acolorible.*

PROVA. Sigui v un vèrtex de G amb grau 5 (si és més petit que 5, acolorim $G - v$ per inducció i tenim un color lliure per a v). Siguin $u_1, \ldots, u_5$ els veïns de v. Com que K_5 no és planari, n'hi ha almenys dos d'aquests, u_i i u_j, que no són adjacents. Contraiem les arestes vu_i, vu_j simultàniament i, per inducció, acolorim el graf resultant G' amb 5 colors. Ara acolorim G igual que G', però donant als vèrtexs u_i i u_j el mateix color que tenia el vèrtex identificat $v = u_i = u_j$ a G'. Els veïns de v a G fan servir 4 colors com a molt i, per tant, en queda un lliure per a v. □

La prova més coneguda del teorema anterior és la de Heawood, que fa servir l'intercanvi de dos colors. La que hem presentat il·lustra, igual que la prova del teorema de Kuratowski, la utilitat de les contraccions en les proves inductives. Una variant del problema és la següent: per a cada vèrtex v d'un graf G tenim una llista $C(v)$ de colors admissibles i volem acolorir G fent servir un color de $C(v)$ per a cada v (i de manera que vèrtexs adjacents rebin colors diferents). Si això és possible sempre que cada llista tingui k colors, diem que G és k-llista-acolorible. Erdős, Rubin i Taylor van conjecturar que tot graf és 5-llista--acolorible. Thomassen va trobar una prova sensacional, que ha esdevingut un clàssic; el lector pot consultar-la al deliciós llibre d'Aigner i Ziegler [1].

Teorema 8 (Thomassen). *Tot graf planari G és 5-llista-acolorible.*

Acabem el tema de les coloracions amb un comentari sobre la prova del teorema dels quatre colors. Les úniques proves conegudes demanen la consideració de centenars de configuracions inevitables i provar que cada una d'aquestes configuracions permet reduir el problema per inducció. És cert que per fer totes les comprovacions calen ordinadors, però la correctesa de la prova més recent [44] no la discuteix ningú. El que ens incomoda de la prova és que tingui tants casos, no que s'hi hagin de fer servir ordinadors. S'han trobat moltes formulacions equivalents del teorema [61], algunes purament algebraiques, però fins avui cap d'aquestes no ha donat lloc a una demostració alternativa. La veurem algun dia?

Passem ara a discutir les generalitzacions del teorema de Kuratowski. Donada una superfície S, direm que G és una obstrucció (minimal) per a S si G no té vèrtexs de grau dos, no es pot dibuixar en S i qualsevol subgraf propi de G pot dibuixar-se en S. El fet que G no tingui vèrtexs de grau dos té cura de les subdivisions. El teorema de Kuratowski pot reformular-se dient que les úniques obstruccions en l'esfera són K_5 i $K_{3,3}$. Quines són les obstruccions en altres superfícies? Quantes n'hi ha?

Un resultat útil sobre el gènere és el següent: sigui $G \cup H$ la unió disjunta de dos grafs, llavors

$$\mathbf{g}(G \cup H) = \mathbf{g}(G) + \mathbf{g}(H).$$

Veiem ara que $K_5 \cup K_5$ és una obstrucció per al tor. En primer lloc, $\mathbf{g}(K_5 \cup K_5) = 2$, ja que $\mathbf{g}(K_5) = 1$. D'altra banda, si suprimim una aresta de K_5, el graf resultant és planari. Un cop dibuixat K_5 en el tor, hi ha lloc per afegir-hi qualsevol graf planari en una de les cares. Per tant, $\mathbf{g}(K_5 \cup K_5 - e) = 1$. Un altre exemple és el graf $K_5 \circ K_5$ que resulta de prendre dues còpies de K_5 i identificar un vèrtex de cada còpia. El motiu és que, si denotem per $G \circ H$ un graf resultant d'identificar un vèrtex de G amb un de H, tenim que el gènere també és additiu, és a dir,

$$\mathbf{g}(G \circ H) = \mathbf{g}(G) + \mathbf{g}(H).$$

Aquestes són només dues de les milers d'obstruccions conegudes per al tor. Un raonament anàleg ens diu que $K_5 \cup K_5$ i $K_5 \circ K_5$ són obstruccions per al pla projectiu. També ho són $K_{3,3} \cup K_{3,3}$, $K_5 \cup K_{3,3}$ i altres combinacions dels dos grafs de Kuratowski. En aquest cas en sabem la llista completa.

Teorema 9 (Archdeacon). *Hi ha exactament 103 obstruccions per al pla projectiu.*

El primer pas el van fer Glover i Huneke, quan van provar que la llista d'obstruccions és finita i, juntament amb Wang, van trobar la llista de les 103 obstruccions. Poc després, Archdeacon va provar que la llista era completa [3] (podeu trobar-les en un apèndix de [38]). Més tard, Archdeacon i Huneke [4] van trobar una prova per a superfícies no orientables, i Robertson i Seymour [49] en van trobar una per a qualsevol superfície.

Teorema 10. *Per a qualsevol superfície hi ha un nombre finit d'obstruccions.*

La prova de [49] no és constructiva, en el sentit que no dóna una fita per a la mida de les obstruccions. La primera prova constructiva es deu a Mohar [36]. Per a una superfície fixa S qualsevol, presenta un algorisme que, donat un graf G, o bé troba una immersió de G a S, o bé troba un subgraf de G homeomorf a una obstrucció. Més endavant veurem com provar aquest resultat bàsic fent servir el concepte d'*amplada d'arbre*.

4 Menors en grafs

Hem definit les obstruccions en termes de subgrafs, és a dir, de supressió d'arestes. Si permetem també la contracció d'arestes entra en joc el concepte més general de *menor*, un concepte clau en la teoria de grafs moderna.

Diem que un graf G conté H com a menor[7] si podem obtenir H a partir de G mitjançant tres operacions:

1. Supressió d'arestes.
2. Contracció d'arestes (suprimint arestes paral·leles si se'n produeixen).
3. Supressió de vèrtexs aïllats.

L'operació 3 és purament tècnica i serveix per al cas que H no sigui connex, les operacions realment importants són les de suprimir i contreure arestes. La supressió i contracció d'arestes commuten, la qual cosa implica una definició equivalent: G conté H com a menor si H es pot obtenir a partir d'un subgraf de G mitjançant contracció d'arestes.

Hi ha encara una tercera formulació equivalent, que de fet és la més intuïtiva. Sigui $V(H) = \{v_1, \dots, v_h\}$ el conjunt de vèrtexs de H. Llavors G conté H com a menor si existeixen subgrafs connexos disjunts $G_1, \dots, G_h$ tals que, si $v_i v_j$ és una aresta de H, llavors hi ha com a mínim una aresta entre G_i i G_j. La idea és que si identifiquem cada G_i a un sol punt p_i contraient totes les arestes de G_i (per això cal que sigui connex), llavors les arestes entre els G_i donen lloc a una còpia de H sobre $\{p_1, \dots, p_h\}$. Per exemple, la figura 3 mostra un graf que conté K_4 com a menor. També mostra el graf de Petersen:[8] la contracció de les arestes marcades dóna lloc a K_5.

Si G conté una subdivisió de H, llavors G conté H com a menor; només cal contreure repetidament les arestes que formen part dels camins subdividits. El recíproc no és cert: el graf de Petersen no conté una subdivisió de K_5, ja que només té vèrtexs de grau 3. En canvi, si H té grau màxim com a molt tres, llavors un graf conté H com a menor si, i només si, el conté com a subdivisió. Per exemple, contenir $K_{3,3}$ com a menor és el mateix que contenir-lo com a subdivisió.

---

7 El terme prové de les matrius: a una matroide vectorial, contreure i suprimir elements correspon a esborrar files i columnes de la matriu associada.

8 Julius Petersen, matemàtic danès, va publicar el 1891 el seu teorema sobre 1-factors a grafs cúbics, que va contribuir a donar forma a la teoria de grafs moderna.

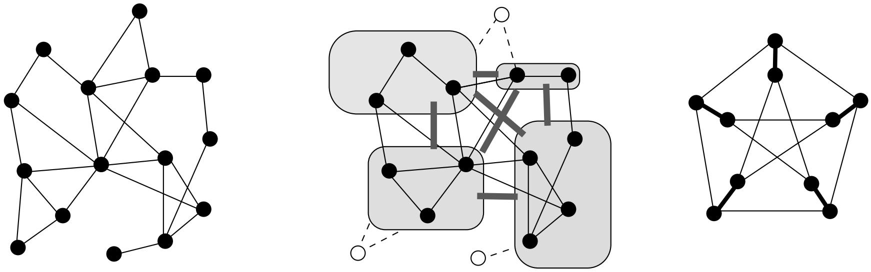

FIGURA 3: El graf de l'esquerra conté K_4 com a menor: al centre es mostren quatre subgrafs connexos i les arestes que els uneixen formant K_4. A la dreta hi ha el graf de Petersen: contraient les arestes gruixudes s'obté K_5.

El teorema de Kuratowski es pot reformular en termes de menors. La prova del resultat següent és immediata, suposant el teorema de Kuratowski.

TEOREMA 11. *Un graf és planari si, i només si, no conté K_5 ni $K_{3,3}$ com a menors.*

Fins ara ens hem ocupat de caracteritzar una classe de grafs mitjançant menors exclosos. També ens interessa com són els grafs que no contenen un graf donat com a menor. Definim $\mathrm{Ex}(H)$ com la classe dels grafs que no contenen H com a menor. Més en general, definim

$$\mathrm{Ex}(H_1, \ldots, H_k) = \{G : G \text{ no conté cap dels } H_i \text{ com a menor}\}.$$

Per exemple, $\mathrm{Ex}(K_5, K_{3,3})$ és la classe dels grafs planaris i $\mathrm{Ex}(K_4)$ la classe dels grafs sèrie-paral·lels.

Amb la ment posada en el problema dels quatre colors, Wagner es va preguntar l'any 1935 com eren les classes $\mathrm{Ex}(K_5)$ i $\mathrm{Ex}(K_{3,3})$, obtingudes prohibint només un dels grafs de Kuratowski. Per tal d'explicar els seus resultats ens cal definir les k-sumes. Siguin G i H grafs, cada un amb un subgraf complet de mida k distingit. La k-suma s'obté identificant els dos subgrafs complets en un subgraf complet K i suprimint algunes (les que vulguem) arestes de K. La 0-suma de dos grafs és la unió disjunta, la 1-suma és la identificació per un vèrtex, la 2-suma és la identificació per una aresta, suprimint-la si és el cas, etc. Wagner va provar els teoremes següents [66].

TEOREMA 12 (WAGNER). *Un graf és a $\mathrm{Ex}(K_{3,3})$ si, i només si, es pot obtenir fent k-sumes amb $k \leq 2$ de grafs planaris i el graf K_5.*

Com que la 2-suma de grafs planaris és planari, podem dir que la classe $\mathrm{Ex}(K_{3,3})$ no és gaire lluny de la classe dels grafs planaris: afegim el graf excepcional K_5 i fem identificació d'arestes.

El graf V_8 s'obté afegint a un cicle de longitud 8 les quatre cordes que uneixen vèrtexs antipodals.

TEOREMA 13 (WAGNER). *Un graf és a* $\mathrm{Ex}(K_5)$ *si, i només si, es pot obtenir fent k-sumes amb* $k \leq 3$ *de grafs planaris i el graf* V_8.

La classe $\mathrm{Ex}(K_5)$ és més rica. Observem que si fem 3-sumes (identificació per triangles) repetides de grafs planaris obtenim grafs que no són planaris, per exemple $K_{3,n}$. Una de les conseqüències del resultat anterior que obté Wagner és la següent:

> El teorema dels quatre colors és equivalent al fet que tot graf de $\mathrm{Ex}(K_5)$ és 4-acolorible.

Una implicació és evident, ja que $\mathrm{Ex}(K_5)$ conté els grafs planaris. L'altra és senzilla per inducció. N'hi ha prou de considerar els grafs de $\mathrm{Ex}(K_5)$ maximals, que s'obtenen fent k-sumes de grafs planaris triangulats i del graf V_8 sense suprimir arestes en fer la identificació d'arestes o de triangles. Si dos d'aquests grafs estan 4-acolorits, identificant vèrtexs, arestes i triangles, podem mantenir la 4-coloració. Com que V_8 és 3-acolorible, el teorema dels quatre colors implica el resultat. Wagner intenta resoldre el problema dels quatre colors analitzant una classe més gran que la dels grafs planaris, la que s'obté d'excloure només K_5, però troba que els grafs planaris reapareixen d'una manera essencial al teorema d'estructura. La conjectura de Hadwiger, que discutim a l'últim apartat, diu que tot graf de $\mathrm{Ex}(K_{t+1})$ és t-acolorible. El cas $t = 4$ és el que acabem de discutir.

Hi ha alguns altres teoremes d'estructura similars, formulats per Wagner i el seu deixeble Halin, i més recentment per Maharry i altres, però no gaires més. Per exemple, sabem com són els grafs de $\mathrm{Ex}(H)$, on H s'obté de $K_{3,3}$ afegint una o dues arestes. Però no tenim un teorema d'estructura per a $\mathrm{Ex}(K_n)$ quan $n \geq 6$. Més endavant veurem un teorema aproximat, que diu que $\mathrm{Ex}(H)$ està contingut en una classe $\mathcal{L}$ definida en termes de grafs a una superfície de gènere fitat, k-sumes amb k fitat, i altres operacions locals. Aquest teorema és una peça clau en la prova del teorema dels menors.

5 El teorema dels menors

Recordem l'enunciat del teorema: si $\mathcal{G}$ és una classe tancada per menors, llavors hi ha un nombre finit de menors exclosos. Siguin $H_1, H_2 \dots$ els menors exclosos de $\mathcal{G}$. No pot ser que H_i sigui un menor propi de H_j amb $i \neq j$, ja que per definició H_i seria a $\mathcal{G}$. Per tant, si hi hagués un nombre infinit de menors exclosos, tindríem una família infinita de grafs incomparables per la relació

$$G \preceq H \quad \Leftrightarrow \quad G \text{ és un menor de } H.$$

Aquesta observació ens duu a introduir el llenguatge dels quasiordres. Un quasiordre és una relació reflexiva i transitiva. La relació $\preceq$ anterior és, evidentment, un quasiordre (no podem dir que sigui un ordre en la classe dels grafs etiquetats perquè si G i H són isomorfs, llavors $G \preceq H$ i $H \preceq G$, sense ser iguals).

Un quasiordre $\leq$ és un bon quasiordre si tota successió infinita $x_0, x_1 \dots$ conté dos elements x_i, x_j tals que $x_i \leq x_j$, amb $i < j$. Aquesta condició és equivalent a les dues condicions següents:

1. No hi ha successions infinites estrictament decreixents.
2. No hi ha anticadenes (elements mútuament incomparables) infinites.

Una implicació és evident. En l'altre sentit, sigui $x_0, x_1 \dots$ una successió infinita i suposem les dues condicions anteriors. Acolorim els parells (x_i, x_j) tals que $i < j$ amb tres colors: vermell si $x_i \leq x_j$, verd si $x_i > x_j$ i blau si x_i, x_j són incomparables. Pel teorema de Ramsey infinit, existeix un conjunt infinit $I \subseteq \mathbb{N}$ tal que tots els parells (x_i, x_j) amb $i, j \in I$ tenen el mateix color. Aquest color no pot ser verd, perquè hi hauria una successió infinita decreixent, i no pot ser blau perquè hi hauria una anticadena infinita. Ha de ser vermell i trobem un parell tal que $x_i \leq x_j$.

Hi ha una altra formulació equivalent en termes d'ideals. Un ideal (cap amunt) és un conjunt I tal que si $x \in I$ i $x \leq y$, llavors $y \in I$. Diem que I està generat per $J \subseteq I$ si $I = \{x \in X \colon \exists y \in J, y \leq x\}$. Amb aquestes definicions, X és un bon quasiordre si, i només si, tot ideal està generat per un conjunt finit. En el context de menors en grafs, els grafs que contenen un menor exclòs d'una classe tancada per menors formen un ideal. La condició de finitud diu que hi ha un nombre finit de menors exclosos (elements minimals de l'ideal).

És evident que no hi ha cadenes infinites descendents amb la relació $\preceq$ de menors en grafs, ja que en prendre un menor propi el nombre d'arestes disminueix. En conseqüència, el teorema dels menors equival a dir que la relació $\preceq$ al conjunt dels grafs finits és un bon quasiordre. El primer resultat en aquesta direcció és el teorema dels menors per a arbres. Donats dos arbres T i S amb arrel, diem que $T \leq S$ si existeix una subdivisió T' de T i una aplicació $\varphi \colon V(T') \to V(S)$ que envia l'arrel de T' a l'arrel de S i que respecta l'ordre dels arbres: això últim vol dir que si x és un descendent de y a T', llavors $\varphi(x)$ ho és de $\varphi(y)$ a S. Fem notar que si $T \leq S$, llavors T és un menor de S. Ja l'any 1937 es va formular la conjectura següent, que és més forta que l'enunciat corresponent amb menors, i que va ser provada independentment per Kruskal [32] i Tarkowski [58].

Teorema 14. *Els arbres finits estan ben quasiordenats per la relació $\leq$.*

Una prova senzilla és deguda a Nash-Williams [39]. La prova amb detall pot trobar-se a [16], però aquí en donem les idees principals. Diem que una successió d'arbres amb arrel $T_0, T_1 \dots$ és dolenta si no existeixen $i < j$ amb $T_i \leq T_j$. Suposem que hi ha una successió dolenta i sigui T_0 l'arbre més petit amb què pot començar una successió dolenta. Procedint per inducció podem trobar una successió dolenta $T_0, T_1 \dots$ tal que T_k és l'arbre més petit d'una successió dolenta que comença per $T_0, \dots, T_k$. És fàcil veure que $T_0, T_1 \dots$ és dolenta.

Sigui A_n el conjunt d'arbres que s'obtenen eliminant l'arrel de T_n, cada un d'aquests està arrelat al fill corresponent de l'arrel. Sigui $A = \bigcup_{n\geq 0} A_n$. Fent servir el fet que $T_0, T_1 \dots$ és una successió dolenta minimal, es prova que el conjunt A està ben quasiordenat. Ara ens cal el resultat següent:

> LEMA (HIGMAN) Si $\leq$ és un bon quasiordre a X, també ho és el quasiordre definit en el conjunt dels subconjunts finits de X per la relació: $A \leq B$ si existeix una injecció $f\colon A \to B$ tal que $a \leq f(a)$ per a tot $a \in A$.

Aplicant el lema, existeixen $i < j$ i una injecció $\varphi\colon A_i \to A_j$ tal que $T \leq f(T)$ per a tot $T \in A_i$. Si enviem l'arrel de T_i a l'arrel de T_j podem estendre la unió de les immersions $T \to \varphi(T)$ a una aplicació $\varphi\colon V(T_i) \to V(T_j)$, que conserva l'ordre dels arbres. Això prova que $T_i \leq T_j$, contràriament a la hipòtesi.

El teorema anterior diu que donat un conjunt infinit d'arbres, sempre n'hi ha un que és una subdivisió d'un altre. Observem que aquest resultat no és cert per a grafs arbitraris. Sigui G_n el graf amb $2n$ vèrtexs obtingut unint n triangles cíclicament; més formalment, al cicle $v_1 v_2 \cdots v_{2n}$ li afegim les n arestes $v_1v_3, v_3v_5, \dots, v_{2n-1}v_1$. És fàcil veure que $G_2, G_3 \dots$ són incomparables per subdivisions, és a dir, no existeixen $i \neq j$ tals G_i sigui una subdivisió de G_j.

D'altra banda, tenim el resultat següent, que es prova fàcilment [38].

LEMA 15. *Donat un graf H, existeixen grafs $H_1, \dots, H_m$ tals que un graf conté H com a menor si, i només si, conté algun dels H_i com a subdivisió.*

Els grafs H_i s'obtenen escindint vèrtexs de H. L'operació d'escindir un vèrtex v de grau com a mínim quatre, consisteix a suprimir v, crear dos nous vèrtexs v_1 i v_2 adjacents, i fer que tot vei de v del graf original sigui adjacent a v_1 o a v_2 (però no a tots dos) i de manera que v_1 i v_2 tinguin grau com a mínim tres. Per exemple, si H és l'estrella de quatre puntes S_4, llavors els H_i són el mateix S_4 i l'arbre T que es mostra a la figura 4.

Això implica que si una classe està caracteritzada per un nombre finit de menors exclosos, també ho està per un nombre finit d'obstruccions (subdivisions excloses). Tot menor exclòs és una obstrucció, però no al revés. Per exemple, ja hem dit que hi ha 103 obstruccions per a dibuixar un graf en el pla projectiu, però només hi ha 35 menors exclosos. N'hi ha 12 que s'obtenen com a unió disjunta, identificació d'un vèrtex o identificació de dos vèrtexs de K_5 i $K_{3,3}$, als quals hem d'afegir 23 menors que són 3-connexos (vegeu la figura 6.5 a [38]). Un exemple d'obstrucció que no és un menor exclòs és el graf que es mostra a la dreta de la figura 4. En efecte, si contraiem l'aresta xy obtenim un graf que segueix sense admetre una immersió al pla projectiu. Fem notar que si, a més, contraiem $x'y'$, llavors arribem a un dels menors exclosos, obtingut identificant dues còpies de K_5 per una aresta i esborrant l'aresta.

6 Amplada d'arbre

En certa manera, els arbres són els grafs més senzills que hi ha. Podem pensar en un arbre recursivament de la manera següent: comencem amb una aresta i

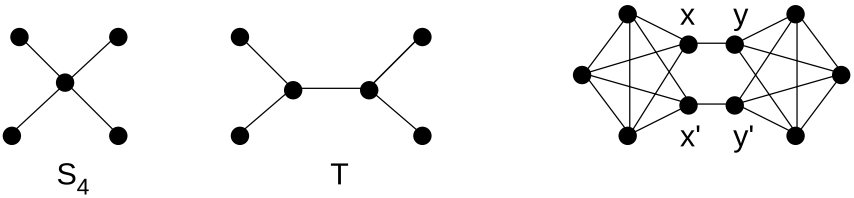

FIGURA 4: A l'esquerra i al centre, les subdivsions excloses per a l'estrella de quatre puntes. A la dreta, una obstrucció per al pla projectiu que no és un menor prohibit.

afegim repetidament un nou vèrtex adjacent a un vèrtex ja existent. Definim ara una generalització d'aquest concepte. Un k-arbre s'obté a partir d'un graf complet inicial amb $k+1$ vèrtexs, afegint repetidament un nou vèrtex adjacent a un subgraf complet amb k vèrtexs. Un 1-arbre és el mateix que un arbre; la figura 5 mostra un exemple de 2-arbre i de 3-arbre. Definim l'*amplada d'arbre*[9] $\mathrm{aa}(G)$ d'un graf G com el mínim k tal que G és subgraf d'un k-arbre:

$$\mathrm{aa}(G) = \min\{k\colon G \text{ és subgraf d'un } k\text{-arbre}\}.$$

Una formulació equivalent és la següent: $\mathrm{aa}(G) \leq k$ si G es pot obtenir fent k-sumes (definides en l'apartat 4) a partir de grafs amb, com a molt, $k+1$ vèrtexs.

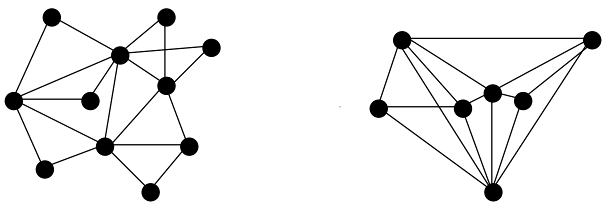

FIGURA 5: Un 2-arbre i un 3-arbre.

La formulació més útil des del punt de vista de l'algorísmia és aquesta: una descomposició en arbre d'un graf $G = (V, E)$ consta d'una col·lecció de subgrafs $(G_t)_{t\in T}$, indexada pels nodes d'un arbre T, que satisfà les condicions següents:

1. $G = \bigcup_{t\in T} G_t$.
2. Per a qualsevol vèrtex $v \in V$, el conjunt dels t tals que $v \in V(G_t)$ forma un subarbre connex de T.

9 El terme en anglès és *tree-width*. Hi ha moltes nocions de teoria de grafs amb un nom semblant, com ara *branch-width*, *clique-width*, *face-width*, etc. La traducció que proposem es pot estendre fàcilment a les diferents menes d'amplada.

L'amplada de la descomposició és el valor

$$\max\{|V(G_t)| - 1 \colon t \in T\}.$$

Es pot comprovar que $\mathrm{aa}(G)$ és la mínima amplada entre totes les descomposicions en arbre de G. En altres paraules, $\mathrm{aa}(G) \leq k$ si, i només si, G admet una descomposició en arbre $(G_t)_{t\in T}$ amb $|V(G_t)| \leq k+1$ per a tot $t \in T$. La primera condició de la definició diu que tots els vèrtexs i arestes de G són a algun dels G_i. La segona condició és la clau: ens assegura que si explorem G recorrent l'arbre T, podem controlar quan hem acabat de processar un vèrtex donat.

Una propietat senzilla d'aquest paràmetre és que és monòton respecte de prendre menors:

Si H és un menor de G, llavors $\mathrm{aa}(H) \leq \mathrm{aa}(G)$.

Per tant, la classe $\mathcal{A}_k$ dels grafs amb amplada d'arbre com a molt k és tancada per menors. La classe $\mathcal{A}_1$ és la dels grafs acíclics, aquells en què totes les components són arbres. Tal com hem dit en la introducció, $\mathcal{A}_2$ és la classe dels grafs sèrie-paral·lels.

El graf graella R_k té com a vèrtexs els parells d'enters (i,j) amb $1 \leq i, j \leq k$; dos vèrtexs $(i,j), (i',j')$ són adjacents si tenen una coordenada igual i l'altre difereix en una unitat. És senzill veure que $\mathrm{aa}(R_k) \leq k$, però no ho és tant veure que $\mathrm{aa}(R_k) = k$ (una manera de veure-ho és amb el joc del lladre i els policies [9]). Una conseqüència és que si un graf conté una graella gran, llavors té amplada d'arbre gran. Robertson i Seymour van trobar una mena de recíproc molt important.

Teorema 16 (Robertson, Seymour [47]). *Per a tot enter k existeix un enter $r = r(k)$ tal que si* $\mathrm{aa}(G) \geq r$, *llavors G conté la graella R_k com a menor.*

S'ha provat que $r(k) \leq c^{k^5}$ per a una constant $c > 0$ i es conjectura que aquest valor es pot reduir fins a una funció polinòmica de k [15]. Una conseqüència important del resultat anterior és la següent.

Teorema 17 (Robertson, Seymour [47]). *La classe* $\mathrm{Ex}(H)$ *té amplada d'arbre fitada si, i només si, H és planari.*

Prova. Suposem que H no és planari. Atès que les graelles són planaris, H no és un menor de R_k. Per tant, totes les graelles són a $\mathrm{Ex}(H)$ i l'amplada d'arbre no és fitada.

Recíprocament, suposem que H és planari. Llavors existeix un k tal que H és un menor de R_k (aquest és un exercici bonic: substituïm un vèrtex de grau d de H per un arbre de grau tres amb d fulles i prenem una graella prou fina). Si r és com en el teorema anterior, llavors l'amplada d'arbre d'un graf G de $\mathrm{Ex}(H)$ és més petita que k, altrament G conté R_k, i per tant H, com a menor. □

El resultat anterior és més general: la classe $\mathrm{Ex}(H_1, \ldots, H_k)$ té amplada fitada si, i només si, algun dels H_i és planari.

Un dels primers resultats en el programa que va dur al teorema dels menors és el següent, que generalitza el teorema de Kruskal.

TEOREMA 18 (ROBERTSON, SEYMOUR [48]). *La classe de grafs amb amplada d'arbre fitada per k està ben quasiordenada per la relació dels menors.*

La prova fa servir la tècnica de la successió minimal dolenta que hem emprat abans, però és força més complicada. Robin Thomas [59] va provar l'existència de descomposicions en arbre amb bones propietats, resultat que es va fer servir a [48] per simplificar la demostració (vegeu [17, cap. 7]).

El teorema anterior es pot fer servir per provar directament que hi ha un nombre finit de menors exclosos per a cada superfície, una de les fites dels programa de Robertson i Seymour. N'hi ha prou de provar el lema següent, formulat per Thomassen [63].

LEMA 19. *Per a tota superfície S existeix un enter k tal que cap obstrucció per a S conté la graella R_k com a menor.*

El lema anterior, juntament amb el teorema 16, implica que les obstruccions de S tenen amplada d'arbre fitada. El teorema 18 implica, llavors, que n'hi ha un nombre finit.

7 Sobre la prova

Donada una successió infinita de grafs $G_0, G_1 \ldots$, el teorema dels menors afirma que existeixen $i < j$ tals que G_i és un menor de G_j. Suposem que aquest no és el cas. Llavors cap dels $G_1, G_2 \ldots$ no conté G_0 com a menor, és a dir, són tots a la classe $\mathrm{Ex}(G_0)$. Si G_0 és planari, pel teorema 17 la classe $\mathrm{Ex}(G_0)$ té amplada d'arbre fitada i, segons el teorema 18, els grafs de $\mathrm{Ex}(G_0)$ estan ben quasiordenats per la relació de menors. Això contradiu la hipòtesi que els $G_1, G_2 \ldots$ són incomparables. Per al cas general en què G_0 no és planari, Robertson i Seymour van provar un teorema d'estructura que descriu com són els grafs que exclouen un graf fix com a menor. Per descriure els grafs que no contenen un graf H com a menor, cal considerar almenys els ingredients següents, tal com es discuteix a [30]:

1. *k-sumes i descomposicions en arbre*. Suposem que H és k-connex. Si G_1 i G_2 són grafs que no contenen H com a menor, llavors la ℓ-suma de G_1 i G_2, amb $\ell < k$, tampoc no conté H com a menor. D'aquesta manera podem construir grafs grans que no contenen H com a menor i la seva estructura està descrita per una descomposició en arbre.
2. *Grafs en superfícies*. Si H no admet una immersió a una superfície S, llavors els grafs que sí que admeten una immersió a S no poden contenir H com a menor.

3. *Extensions fitades i vèrtexs àpex.* Suposem que per a tot conjunt de k vèrtexs $U \subseteq V(H)$, el graf $H - U$ no admet una immersió a la superfície S. Si G és un graf que conté un conjunt de com a molt k vèrtexs tal que la seva supressió dóna un graf que admet una immersió a S, llavors G no conté H com a menor. Els vèrtexs suprimits de G s'anomenen *àpex* i poden ser adjacents a qualsevol altre vèrtex de G.
4. *Vòrtexs.* Considerem l'exemple següent. Prenem un graf planari gran amb cara externa $C = v_1v_2 \dots v_r$ i sigui k un enter. Afegim totes les arestes u_iu_j tals que u_i, u_j estan a distància com a molt k a la vora de C. Si $k = 2$, el graf resultant pot contenir K_7 com a menor, però no pot contenir K_8. Com que aquest graf no es pot obtenir amb les tres construccions anteriors, ens cal afegir aquesta nova construcció. Aquesta és la motivació per a l'estructura de vòrtex, definida a continuació, que generalitza l'exemple anterior i tots els menors que se n'obtenen.

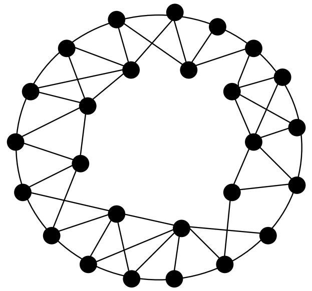

FIGURA 6: Un vòrtex d'amplada dos.

Robertson i Seymour demostren que les construccions anteriors i les seves combinacions són suficients per descriure de manera aproximada els grafs que no contenen H com a menor. Abans d'enunciar el seu teorema, definim amb precisió el concepte de *vòrtex* (anomenat *serrell* a [34]). Donat un cicle C, triem un conjunt d'arcs a C de manera que cada vèrtex està contingut com a molt a k arcs. Per a cada arc A, formem un nou vèrtex v_A i el connectem com vulguem a alguns vèrtexs de A. Connectem també, tants com vulguem, parells (v_A, v_B) si A i B tenen un vèrtex comú. Diem que hem afegit a C un vòrtex d'amplada k (vegeu la figura 6).

Per a tot enter positiu k, definim ara la classe de grafs $\mathcal{L}_k$.

1. Comencem amb una immersió 2-cel·lular d'un graf G en una superfície de gènere com a molt k.
2. Triem com a molt k cares de G i afegim a cada una un vòrtex d'amplada com a molt k.
3. Creem k vèrtexs nous (anomenats *àpexs*) i els connectem arbitràriament als vèrtexs existents.

4. Construïm repetidament la k-suma del graf actual amb un altre graf construït amb les operacions (1)–(3) anteriors.

Si recordem el teorema 12 sobre grafs a $\mathrm{Ex}(K_5)$, hi veiem algunes similituds: prenem els grafs planaris com a punt de partida, hi afegim un graf excepcional i fem k-sumes, amb $k \leq 3$, d'aquests grafs repetidament. La classe $\mathcal{L}_k$ té com a punt de partida els grafs de gènere com a molt k. Hi afegim grafs de gènere més gran, que permeten algunes operacions (vòrtexs i àpexs amb mida fitada) i prenem k-sumes repetidament. Robertson i Seymour van provar que tota classe tancada per menors està continguda en una de les classes $\mathcal{L}_k$.

Teorema 20. *Per a tot graf H existeix un enter k tal que* $\mathrm{Ex}(H) \subset \mathcal{L}_k$.

El teorema anterior no dóna una caracterització de la classe $\mathrm{Ex}(H)$, ja que la inclusió és estricta, però ens diu que tot graf de $\mathrm{Ex}(H)$ es pot obtenir fent k-sumes de grafs que admeten una *quasiimmersió* a una superfície de gènere fitat.

Tornem ara a la successió de grafs $G_1, G_2 \dots$, tots a $\mathrm{Ex}(G_0)$. Pel teorema anterior, cada un dels $G_1, G_2 \dots$ té una descomposició en arbre on cada una de les parts admet una quasiimmersió a un conjunt finit $\mathcal{S}$ de superfícies. L'estructura d'arbre ajuda, com en la demostració del teorema 17, que generalitza la del teorema 14, a provar que estan ben quasiordenats. Cal provar finalment que els grafs que admeten una quasiimmersió a alguna de les superfícies $S \in \mathcal{S}$ estan ben quasiordenats. Això es demostra per inducció sobre el gènere de S. La base de la inducció torna a ser el cas que G_0 és planari. Per al cas general, Robertson i Seymour codifiquen l'estructura afegida (els vòrtex) als grafs que admeten una immersió a S en un hipergraf i proven una versió del teorema 10 per a hipergrafs. Tal com ja hem dit, els detalls són molts, llargs i complicats.

Acabarem aquest apartat discutint un últim resultat del programa de Robertson i Seymour. A més dels conceptes de *subdivisió* i de *menor*, tenim el concepte d'*immersió* d'un graf en un altre. Donats dos grafs G i H, una immersió de H en G és una injecció $f\colon V(H) \to V(G)$ i, per a cada aresta $uv \in E(H)$, un camí P_{uv} a G que uneix els vèrtexs $f(u)$ i $f(v)$, amb la propietat que els camins P_{uv} amb $uv \in E(H)$ són disjunts dos a dos en arestes. La definició recorda la d'una subdivisió, amb la gran diferència que només demanem que els camins siguin disjunts en arestes, no en vèrtexs. Per exemple, tot graf complet K_n admet una immersió a un graf planari: n'hi ha prou de dibuixar K_n en el pla i afegir un nou vèrtex a cada creuament de dues arestes, de manera que el graf resultant és planari.

L'any 1963, Nash-Williams va conjecturar que els grafs estan ben quasiordenats per la relació d'immersió. L'últim article de la sèrie del menors en grafs [53] està dedicat a provar aquesta conjectura.

Teorema 21 (Robertson i Seymour). *Donada una successió $G_0, G_1 \dots$ de grafs finits, existeixen $i < j$ tals que hi ha una immersió de G_i a G_j.*

La prova fa un ús intensiu de les eines desenvolupades anteriorment, en particular de la relació de menors a hipergrafs.

8 Grafs, algorismes i lògica

Molts problemes computacionals difícils es poden resoldre per a arbres en temps polinomial (fins i tot lineal) amb una exploració de les fulles cap a l'arrel. El mateix val per a grafs d'amplada d'arbre fitada per una constant k. Podem explorar l'arbre T d'una descomposició $(G_t)_{t\in T}$ i a cada un dels subgrafs G_t, que tenen com a molt $k+1$ vèrtexs, ens podem permetre un cost computacional que sigui una funció de k, com ara $k!$ o 2^k.

Per exemple, per decidir si un graf amb amplada d'arbre fitada admet una 3-coloració, procedim així. En primer lloc, un resultat bàsic de Bodlaender [7] diu que, per a k fix, es pot decidir en temps lineal si un graf té una descomposició en arbre d'amplada k i trobar una tal descomposició. Sigui doncs $(G_t)_{t\in T}$ una descomposició en arbre de G d'amplada k i arrelem T a qualsevol vèrtex. Sigui B_t el conjunt de vèrtexs de G_t i sigui D_t el conjunt de vèrtexs que apareixen al subarbre de la descomposició que té t com a arrel. Per a cada coloració $c\colon B_t \to \{1,2,3\}$ calculem una funció booleana $\beta(t,c)$ que ens diu si c es pot estendre o no a una 3-coloració de D_t. És fàcil veure que per calcular $\beta(t,c)$ només cal saber els valors de β per als fills de t. L'algorisme comença per les fulles de T i puja fins a l'arrel. El cost a cada node és d'ordre 3^{k+1} i, per tant, el cost total és $O(3^k n)$, que és lineal en el nombre n de vèrtexs. Naturalment, és exponencial en k, altrament tindríem un algorisme polinomial per a un problema NP-complet.

El mètode que hem descrit es coneix com a *programació dinàmica*. El principi bàsic és que el càlcul que cal fer en un node t de l'arbre T es pot fer només amb la informació provinent dels seus fills. Si aquest càlcul es pot fer en un temps que sigui funció només de k, la mida de les parts de la descomposició, tindrem un algorisme polinomial. Molts problemes NP-complets es poden resoldre amb aquest mètode per a grafs d'amplada d'arbre fitada. El teorema de Courcelle diu que tot problema de decisió que es pugui expressar en un cert llenguatge lògic, admet un algorisme lineal per a grafs amb amplada d'arbre fitada. Veiem què diu exactament el teorema.

Un enunciat de grafs en lògica de primer ordre (LPO) està format per variables que representen vèrtexs o arestes, la relació d'adjacència entre vèrtexs i la d'incidència entre vèrtexs i arestes, quantificadors, igualtats i els connectors lògics habituals. Per exemple, la propietat de contenir un triangle es pot expressar en LPO:

$$\exists x \exists y \exists z \text{ tals que } (x,y), (y,z), (x,z) \text{ són arestes.}$$

Més en general, es pot expressar en LPO el fet que un graf fix H sigui un subgraf d'un graf donat. També l'existència d'un conjunt de vèrtexs U dominant (tal que tot vèrtex que no és de U és adjacent a un vèrtex de U) de mida fixa k. La fórmula seria (informalment):

$$\exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y \notin \{x_1, \ldots, x_k\}, \ y \text{ és adjacent a algun dels } x_i.$$

La lògica monàdica de segon ordre (LMSO) és més expressiva, ja que permet també quantificar sobre conjunts de vèrtexs i d'arestes. Per exemple, l'existència d'una 3-coloració d'un graf (V, E) es pot expressar com

$$\exists V_1 \, \exists V_2 \, \exists V_3 \text{ independents tals que } V = V_1 \cup V_2 \cup V_3.$$

Un conjunt U és independent si $\forall x, y \in U$, x i y no són adjacents. Convidem el lector a expressar en LMSO la connectivitat d'un graf i l'existència d'un cicle hamiltonià.

Teorema 22 (Courcelle). *Tot problema de decisió expressable en lògica monàdica de segon ordre es pot resoldre en temps lineal per a grafs d'amplada d'arbre fitada.*

Es pot trobar una prova detallada a [17, cap. 6]. El teorema de Courcelle és un exemple notable de metateorema, que afirma que tota una classe de problemes algorísmics es poden resoldre de manera «eficient» sobre certa classe de grafs. Altres resultats d'aquesta mena són:

1. Tot problema expressable en lògica de primer ordre es pot decidir en temps lineal per a classes de grafs amb grau màxim fitat (Seese [56]).
2. Tot problema expressable en lògica de primer ordre es pot decidir en temps lineal per a grafs planaris (Frick i Grohe [23]).

El primer resultat es pot entendre intuïtivament així. Sigui k una fita per al grau màxim. Si el problema és decidir l'existència d'un subgraf isomorf a un graf fix H de diàmetre D, prenem un vèrtex qualsevol v i explorem la bola de radi D centrada a v, que té com a molt k^D vèrtexs. Dins d'aquesta bola podem decidir si hi ha una còpia de H en temps constant; si ho fem per a cada vèrtex, el cost total és lineal. Els predicats de primer ordre són més generals que el fet de contenir un subgraf, però es poden fer servir idees similars. Pel que fa al segon resultat, una exploració local també és suficient per als grafs planaris. Cal fet notar, però, que el teorema de Courcelle no s'estén als grafs planaris. Per exemple, decidir si un graf és 3-acolorible és un problema NP-complet encara que ens restringim als grafs planaris.

Recentment, els dos primers resultats s'han estès a classes de grafs amb *expansió fitada*, un concepte molt general que inclou classes de grafs amb grau màxim fitat, classes tancades per menors i classes tancades per subdivisions, entre d'altres [40]. S'ha provat que tot problema expressable en lògica de primer ordre es pot decidir en temps lineal per a classes de grafs amb expansió fitada [18].

Aquest resultats estan fortament relacionats amb la complexitat parametritzada, una disciplina que intenta classificar els problemes computacionals segons la dificultat respecte d'un o més paràmetres i no només respecte de la mida de l'entrada. En la situació anterior el paràmetre és l'amplada d'arbre, però poden ser d'altres [17, 22].

9 Per què no tenim algorismes per a un problema polinomial

Sigui $\mathcal{G}$ una classe tancada per menors i considerem el problema de decidir si un graf pertany a $\mathcal{G}$. De manera equivalent, si P és una propietat de grafs tancada per menors, considerem el problema de decidir si un graf satisfà P. Per exemple, un resultat clàssic diu que es pot decidir en temps lineal si un graf és planari. És força més complicat decidir si un graf admet una immersió a una superfície donada, però també hi ha algorismes lineals en aquest cas [36]. El resultat següent és una de les conseqüències més sorprenents del teorema dels menors.

TEOREMA 23. *Tota propietat P tancada per menors es pot decidir en temps polinomial.*

La prova té dues parts. En primer lloc, donat un graf fix H, es prova que es pot decidir en temps polinomial si un graf conté H com a menor. Per això cal resoldre el *problema dels camins disjunts*: donat un graf G i k parells de vèrtexs $(s_1, t_1), \dots, (s_k, t_k)$ (es permeten repeticions de vèrtexs), decidir si existeixen k camins disjunts en vèrtexs tals que el camí i-èsim uneix s_i amb t_i, per a $i = 1, \dots, k$. Roberston i Seymour [50] proven:

TEOREMA 24. *Per a qualsevol enter fix k, hi ha un algorisme amb complexitat $O(n^3)$ per resoldre el problema dels k camins disjunts.*

L'algorisme permet decidir en temps polinomial si un graf G conté una subdivisió d'un graf fix H amb k arestes. Si H té h vèrtexs, només cal provar tots els possibles conjunts de h vèrtexs de G on pugui assentar-se la subdivisió de H. Això dóna un algorisme amb complexitat $O(n^{h+3})$. Amb molta més feina es pot obtenir un algorisme $O(n^3)$ [50, 31]. En virtut del lema 15, tenim la mateixa complexitat per decidir si un graf conté un graf fix com a menor.

TEOREMA 25. *Donat un graf fix H, es pot decidir en temps $O(n^3)$ si un graf conté H com a menor.*

Ara podem concloure la prova del teorema 23. Com que hi ha un nombre finit de menors exclosos per a la propietat P, existeix un algorisme $O(n^3)$ per decidir si un graf satisfà P. Aquest és un resultat purament existencial per dos motius:

- L'algorisme del teorema 25 té unes constants ocultes enormes i no es pot implementar de manera eficient. Les constants són de la forma $2 \uparrow 2 \uparrow 2 \uparrow h$, on $2 \uparrow t = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$ és una torre de t exponencials, i h és el nombre de vèrtexs de H. En paraules de Johnson [29]: «Malauradament, per a qualsevol instància $G = (V, E)$ que pugui caber a l'univers conegut, és fàcil preferir un algorisme $|V|^{70}$ a un algorisme en temps constant, si la constant ha de ser una de les de Robertson i Seymour.»

- Sabem que la llista de menors exclosos és finita, però sovint no sabem quins són ni tenim una fita per al seu nombre.

Un exemple notable d'aquesta situació és decidir si un graf admet una immersió a $\mathbb{R}^3$ sense nusos (altres exemples es discuteixen a [20]). Tal com hem vist en la introducció, la propietat és tancada per menors, però no tenim cap algorisme per resoldre aquest problema, ni tan sols exponencial. La raó és que no podem «anar provant» totes les possibles immersions d'un graf a l'espai, no sabem com discretitzar el problema. Tenim doncs un problema algorísmic que no sabem resoldre, però sabem que existeix un algorisme polinomial.

En canvi, el problema de dibuixar grafs en superfícies es pot discretitzar: una immersió 2-cel·lular d'un graf G a una superfície orientada (el cas no orientat és una mica més complicat i no el tractem) es pot codificar combinatòriament donant un ordre cíclic de les arestes al voltant de cada vèrtex; a més, per a cada immersió combinatòria podem calcular el gènere fàcilment [38]. Per tant, el nombre d'immersions possibles és com a molt $\prod(d_i - 1)!$, on $d_1, \ldots, d_n$ són els graus dels vèrtexs. Aquesta és una quantitat exponencial, però en principi podem provar totes les possibilitats i decidir si un graf admet una immersió a una superfície donada (com ja hem dit abans, per a aquest problema hi ha algorismes lineals efectius).

Una altra propietat tancada per menors és la d'admetre una immersió a $\mathbb{R}^3$ sense enllaços, és a dir, de manera que dos cicles disjunts qualssevol determinin un enllaç trivial a $\mathbb{R}^3$. En aquest cas sabem tots els menors exclosos [55]: són el graf de Petersen i altres sis que s'obtenen d'aquest a partir de transformacions $\Delta Y \Delta$, entre aquests K_6. I en aquest cas tenim un algorisme polinomial efectiu per trobar una immersió sense enllaços si existeix [28]. Ens podem preguntar si el fet que els menors exclosos siguin pocs i coneguts fa més plausible que hi hagi algorismes efectius.

10 Altres aspectes

Per acabar aquesta panoràmica, discutirem altres aspectes relacionats amb la teoria dels menors en grafs.

10.1 La conjectura de Hadwiger

Si un graf conté un graf complet K_t com a subgraf, llavors és clar que calen almenys t colors per acolorir-lo. Però el recíproc no és cert: hi ha grafs sense triangles que requereixen un nombre arbitràriament gran de colors. La conjectura de Hadwiger diu que si t colors són necessaris, llavors el graf conté K_t com a menor (no com a subgraf).

Conjectura 26 (Hadwiger). Si G és un graf que no conté K_t com a menor, llavors G és pot acolorir amb $t-1$ colors.

Per a $t = 3$ és trivial, els grafs sense K_3 com a menor són acíclics i, per tant, bipartits. Si G no conté K_4 com a menor, llavors és sèrie-paral·lel i per tant conté un vèrtex v de grau com a molt dos. Per inducció, $G - v$ és 3-acolorible i la coloració es pot estendre a G. Ja hem vist que el cas $t = 5$ és equivalent al teorema dels quatre colors, degut al teorema de Wagner sobre grafs sense K_5 com a menor.

El cas $t = 6$ va ser resolt per Robertson, Seymour i Thomas [54]. La prova és llarga i complicada. Es demostra que si G és un contraexemple minimal a la conjectura per a $t = 6$, llavors existeix un vèrtex v tal que $G - v$ és planari, que és 4-acolorible. Llavors G és 5-acolorible i arribem a una contradicció. Els casos $t \geq 7$ no estan resolts.

Una conjectura similar per a subdivisions, formulada per Hajós, és falsa. No és cert que si un graf no conté una subdivisió de K_t, llavors és $(t-1)$-acolorible [10]. Els resultats parcials sobre la conjectura de Hadwiger són encoratjadors. Per exemple, és certa per a gairebé tots els grafs, en el sentit següent [8]. La proporció de grafs amb n vèrtexs que contenen com a menor un graf complet de mida $n/\sqrt{\log n}$ tendeix a u; i la proporció de grafs amb n vèrtexs que tenen nombre cromàtic com a molt $n/\log n$ també tendeix a u. Això no exclou, però, que pugui trobar-se un contraexemple. Aquest és considerat un dels problemes oberts més importants en teoria de grafs.

10.2 Propietats de classes tancades per menors

Hem vist que un graf amb n vèrtexs de gènere g té com a molt $3n - 6 + 6g$ arestes, són poques arestes, si es compara amb el nombre quadràtic $n(n-1)/2$ d'arestes del graf complet. Aquesta propietat es compleix a qualsevol classe tancada per menors.

Teorema 27. *Sigui H un graf fix. Existeix una constant c depenent de H tal que tot graf de* $\mathrm{Ex}(H)$ *té com a molt $c \cdot n$ arestes.*

La primera prova d'aquest resultat, formulada per Mader (1967), és senzilla i proporciona el valor $c = 2^{t-3}$ si t és el nombre de vèrtexs de H. Amb mètodes força més refinats es prova que l'ordre de magnitud correcte de c és $t\sqrt{\log t}$. Si $H = K_t$, tenim l'estimació precisa $c \sim \alpha t\sqrt{\log t}$, on $\alpha \approx 0,3191$ és una constant explícita [62]. Una forma alternativa del resultat anterior és: si un graf conté més de $ct\sqrt{\log t}\, n$ arestes, llavors conté K_t com a menor. D'altra banda, per a forçar l'existència d'una subdivisió de K_t calen $ct^2 n$ arestes [16].

El teorema separador de Lipton i Tarjan (1979) per a grafs planaris diu que tot graf planari amb n vèrtexs es pot separar en dues parts de mida com a molt $2n/3$, suprimint no més de $3\sqrt{n}$ vèrtexs. Aquest resultat admet una generalització a classes tancades per menors [2].

Teorema 28. *Sigui G un graf que no conté H com a menor, i sigui t el nombre de vèrtexs de H. Llavors existeix un conjunt de vèrtexs C tal que $G - C = A \cup B$, de manera que no hi ha cap aresta que vagi de A a B,*

$$|A| \le 2n/3, \quad |B| \le 2n/3, \qquad |C| \le t\sqrt{t}\sqrt{n}.$$

L'existència de separadors té aplicacions importants, en particular en el disseny d'algorismes de dividir per vèncer. La constant $2/3$ és arbitrària i es pot substituir per qualsevol constant de l'interval obert $(1/2, 1)$.

Una altra qüestió interessant és aquesta: com pot ser de gran l'amplada d'arbre d'un graf planari amb n vèrtexs? El graf graella $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$, que té n vèrtexs i amplada d'arbre $\sqrt{n}$, mostra que pot arribar a ser tan gran com $\sqrt{n}$. El teorema següent diu que $\sqrt{n}$ és el màxim en qualsevol classe tancada per menors [2].

Teorema 29. *Sigui H un graf fix. Existeix una constant c depenent de H tal que tot graf de* $\mathrm{Ex}(H)$ *té amplada d'arbre com a molt $c\sqrt{n}$.*

Per enunciar el resultat següent ens cal una definició. Un llibre de k pàgines és la superfície (singular) obtinguda identificant les fronteres de k semiplans en una recta comuna, que anomenem *llom*. Qualsevol graf es pot dibuixar en un llibre amb tres pàgines (aquest és un exercici instructiu). El problema és més interessant si exigim que tots els vèrtexs siguin al llom: en aquest cas diem que un graf admet una immersió a un llibre de k pàgines. És sabut que tot graf planari admet una immersió a un llibre de quatre pàgines [67]. La prova del teorema següent fa servir el teorema 20 de manera essencial.

Teorema 30 ([6]). *Sigui H un graf fix. Existeix una constant k depenent de H tal que tot graf de* $\mathrm{Ex}(H)$ *admet una immersió a un llibre de k pàgines.*

Aquest resultat permet fitar superiorment el nombre de grafs planaris, com veurem tot seguit.

10.3 El paradigma de descomposició

Els teoremes de caracterització de classes tancades per menors i, especialment, el teorema 20 d'estructura són exemples característics del que Lovász [34] anomena el *paradigma de descomposició*. Donada una classe de grafs, hem vist com tot graf descompon en peces d'una certa família (grafs planaris o de gènere fitat, afegint grafs excepcionals o admetent modificacions locals) que s'enganxen d'una manera definida (identificant subgrafs de mida petita en forma d'arbre). Aquest mètode s'ha aplicat amb èxit a altres problemes importants, com ara discutim.

Recordem que $\chi(G)$ és el nombre cromàtic d'un graf G. Denotem per $\omega(G)$ la mida del màxim subgraf complet contingut a G. Evidentment, $\chi(G) \ge \omega(G)$. Un graf G és perfecte si $\chi(H) = \omega(H)$ per a tot subgraf induït H de G. És fàcil veure que un graf perfecte no pot contenir cicles induïts senars de longitud senar més gran que quatre, o els seus complements. L'any 1960, Claude Berge va formular dues conjectures famoses sobre grafs perfectes:

1. *Conjectura feble*: un graf és perfecte si, i només si, el seu complement és perfecte.
2. *Conjectura forta*: un graf és perfecte si, i només si, no conté cicles induïts senars de longitud més gran que quatre o els seus complements.

És clar que la conjectura forta implica la feble. La primera conjectura va ser resolta per Lovász [35] l'any 1972. La segona va ser resolta fa pocs anys [12] i no és casual que, entre els autors de la difícil solució, hi trobem Robertson i Seymour. Un graf de Berge és aquell que no té cicles induïts senars de longitud més gran que quatre o els seus complements. Es demostra que un graf de Berge, o bé pertany a una de cinc classes bàsiques de grafs perfectes (entre d'altres, els grafs bipartits i els seus complements), o bé descompon en grafs més petits mitjançant quatre operacions que preserven la propietat de ser Berge i de ser perfecte. Es prova que un contraexemple minimal a la conjectura no admet una tal descomposició i per tant ha de ser perfecte, la qual cosa acaba la demostració. En un article força interessant, Seymour [57] explica com es van enfrontar al problema i l'estratègia que van seguir per trobar la solució.

Un projecte actual de gran abast és estendre la teoria dels menors a matroides. Una matroide consta d'un conjunt finit E i d'una família $\mathcal{I}$ de subconjunts de E, anomenats *independents*, que compleixen les propietats següents:

1. El conjunt buit és independent.
2. Monotonia: si $B \subset A$ i $A \in \mathcal{I}$, llavors $B \in \mathcal{I}$.
3. Augmentació: si $A, B \in \mathcal{I}$ i $|A| > |B|$, llavors existeix $a \in A \backslash B$ tal que $B \cup \{a\} \in \mathcal{I}$.

L'exemple més important és quan E és un subconjunt d'un espai vectorial sobre un cos K, on els independents són els subconjunts de E linealment independents. Aquestes matroides es diu que són representables sobre el cos K. El dual M^* d'una matroide M té el mateix conjunt base i té com a independents els complements dels independents de M. La matroide uniforme $U_{k,n}$ té n elements i els independents són els subconjunts de mida com a molt k. És senzill veure que $U_{2,4}$ no és representable sobre el cos $\mathbb{F}_2$ de dos elements i $U_{2,5}$ no ho és sobre $\mathbb{F}_3$.

Un graf $G = (V, E)$ dóna lloc a una matroide $M(G)$, on E és el conjunt base i els independents són els subconjunts de E que no contenen cicles. Aquestes matroides s'anomenen *gràfiques* i són representables sobre qualsevol cos. En matroides hi ha una noció de dualitat que generalitza la dels grafs planaris. El concepte de *menor* es pot definir també per a matroides, així com el de menor exclòs d'una classe de matroides tancada per menors. Per exemple, la classe de les matroides representables sobre $\mathbb{F}_2$ és tancada per menors i l'únic menor exclòs és $U_{2,4}$. Els menors exclosos per a les matroides representables sobre $\mathbb{F}_3$ són $U_{2,5}, U_{3,5}$, el pla de Fano F (format pels set punts i les set rectes del pla projectiu sobre $\mathbb{F}_2$) i el seu dual F^*. En el cas de $\mathbb{F}_4$ hi ha exactament set menors exclosos. Aquest és l'últim cas resolt de la famosa conjectura de Rota.

CONJECTURA 31 (ROTA). Per a cada cos finit K hi ha un nombre finit de menors exclosos per a les matroides representables sobre K.

L'altra gran conjectura oberta en aquesta àrea és l'anàleg del teorema dels menors.

CONJECTURA 32 (ROBERTSON I SEYMOUR). Les matroides representables sobre un cos finit fix estan ben quasiordenades per la relació de prendre menors.

Fem notar que la conjectura anterior implica el teorema dels menors per a grafs, ja que les matroides gràfiques són representables sobre qualsevol cos.

En els darrers anys, Geelen, Gerards i Whittle han fet progressos molt notables en aquesta direcció. Han provat que les matroides representables sobre un cos finit amb *amplada de branca* (*branch-width* en anglès, un concepte molt proper al d'amplada d'arbre) fitada estan ben quasiordenades i han provat un anàleg del teorema 16 per a matroides, un resultat bàsic en el seu programa. També han provat la conjectura anterior per a matroides binàries, però els detalls encara no han estat publicats.

Un cop més, l'element clau en les demostracions és la descomposició de matroides en una estructura d'arbre. La peça que manca encara és un teorema d'estructura en l'esperit del teorema 20. L'article [24] discuteix l'estat de la qüestió. Els resultats clàssics sobre menors exclosos en matroides (deguts sobretot a Tutte) es poden trobar a [41].

10.4 Enumeració i grafs aleatoris

Com és de gran una classe de grafs tancada per menors? Sigui $\mathcal{G} = \mathrm{Ex}(H)$ i sigui $\mathcal{G}_n$ el conjunt de grafs de $\mathcal{G}$ amb n vèrtexs. El teorema 30, juntament amb el fet que el nombre de grafs planaris és com a molt exponencial en el nombre de vèrtexs, implica que existeix una constant c depenent de H tal que

$$|\mathcal{G}_n| \le c^n.$$

Si ho comparem amb el nombre total de grafs amb n vèrtexs, veiem que $\mathcal{G}$ és relativament bastant petita. En efecte, hi ha de l'ordre de $2^{n(n-1)/2}/n!$ grafs amb n vèrtexs, una quantitat molt més gran que qualsevol exponencial.

Per a certes famílies de grafs tenim resultats molt més precisos. Per exemple, el nombre d'arbres etiquetats és n^{n-2}, un resultat atribuït a Cayley. El nombre d'arbres no etiquetats és asimptòticament

$$c \cdot n^{-5/2} w^n,$$

on c és una constant i $w \approx 2,9956$. Per obtenir aquests resultats es fan servir funcions generadores i anàlisi complexa [21].

Recentment s'han pogut analitzar classes de grafs més complicades amb mètodes analítics. En particular, el nombre de grafs planaris etiquetats amb n vèrtexs és asimptòticament [25]

$$c \cdot n^{-7/2} \gamma^n n!,$$

on $\gamma \approx 27{,}2268$ és una constant definida analíticament. Més en general, el nombre de grafs de gènere g és asimptòticament [11, 5]

$$c_g \cdot n^{5(g-1)/2-1} \gamma^n n!,$$

on c_g és una constant, on cal notar que el creixement exponencial no depèn de g. Tenim estimacions per a algunes altres classes tancades per menors, com ara $\mathrm{Ex}(K_{3,3})$ o $\mathrm{Ex}(K_5 - e)$, però en general no tenim un coneixement prou precís de les funcions generadores associades. Per exemple, no sembla possible analitzar la classe $\mathrm{Ex}(K_5)$ amb aquests mètodes.

Els mètodes analítics també permeten analitzar grafs aleatoris en alguns casos; per brevetat, ens limitarem als grafs planaris. A diferència del model clàssic d'Erdős-Rényi, no sabem com generar grafs planaris aleatoris tirant arestes de manera independent. El model que fem servir és simplement el de la distribució uniforme. Sigui $\mathcal{G}_n$ el conjunt de grafs planaris etiquetats amb n vèrtexs i sigui $g_n = |\mathcal{G}_n|$. Llavors assignem probabilitat $1/g_n$ a cada graf de $\mathcal{G}_n$. Per provar resultats en aquest model ens cal saber comptar grafs amb precisió.

Sigui X_n una variable aleatòria discreta definida sobre $\mathcal{G}_n$, com ara el nombre d'arestes, o el nombre de components connexes, o el nombre de vèrtexs de grau dos. Si sabem estimar amb precisió el nombre $g_{n,k}$ de grafs de $\mathcal{G}_n$ amb $X_n = k$, tindrem accés a la distribució límit de X_n. Per exemple, sigui X_n igual al nombre d'arestes, un dels paràmetres més bàsics d'un graf. Sabem que $X_n \le 3n - 6$, el màxim d'arestes d'un graf planari. Com està distribuïda la variable X_n? Fent servir funcions generadores bivariades i extensions del teorema central del límit, és possible provar el següent:

Teorema 33 ([25]). *El nombre d'arestes X_n d'un graf planari aleatori és asimptòticament normal i tenim*

$$\mathbf{E}(X_n) \sim \alpha n, \qquad \sigma^2(X_n) \sim \lambda n,$$

on $\alpha \approx 2{,}1236$ i $\lambda \approx 0{,}4304$.

El resultat anterior es pot refinar i es pot provar que hi ha una forta concentració al voltant de l'esperança. Per a tot $\epsilon > 0$ existeix una constant $c > 0$ tal que

$$\Pr\{|X_n - \alpha n| > \epsilon n|\} < e^{-cn}.$$

Un altre resultat representatiu és aquest.

Teorema 34 ([25]). *El nombre de components connexes X_n d'un graf planari aleatori és asimptòticament $1 + \mathrm{Poisson}(\lambda)$, on $\lambda \approx 0{,}03744$. En particular, la probabilitat que un graf planari aleatori sigui connex és asimptòticament $e^{-\lambda} \approx 0{,}9633$.*

Més recentment s'han analitzat paràmetres de grafs planaris aleatoris més complexos, com ara la mida de la component k-connexa més gran, on apareixen lleis límit contínues no gaussianes [26]. Tots els resultats anteriors són vàlids també per a grafs en una superfície fixa [11].

Agraïments

Vull agrair els comentaris d'Albert Atserias, Anna de Mier i Ignasi Sau, que han ajudat a millorar la presentació d'aquest article.

Referències

[1] Aigner, M.; Ziegler, G. M. *Proofs from The Book*. 4a edició. Berlín: Springer, 2010. [Traducció espanyola: *El libro de las demostraciones*. Madrid: Nivola, 2005]

[2] Alon, N; Seymour, P.; Thomas, R. «A separator theorem for nonplanar graphs». *J. Amer. Math. Soc.*, 3 (1990), 801–808.

[3] Archdeacon, D. «A Kuratowski theorem for the projective plane». *J. Graph Theory*, 5 (1981), 243–246.

[4] Archdeacon, D.; Huneke, P. «A Kuratowski theorem for nonorientable surfaces». *J. Combin. Theory Ser. B*, 46 (1989), 173–231.

[5] Bender, E. A.; Gao, Z. «Asymptotic enumeration of labelled graphs by genus». *Electron. J. Combin.*, 18 (1) (2011), P13, 28 pàg.

[6] Blankenship, R. L. *Book Embeddings of Graphs*. Tesi del Departament de Matemàtiques, Universitat de l'Estat de Louisiana, EUA, 2003.

[7] Bodlaender, H. L. «A linear-time algorithm for finding tree-decompositions of small treewidth». *SIAM J. Comput.*, 25 (1996), 1305–1317.

[8] Bollobás, B.; Catlin, P. A.; Erdős, P. «Hadwiger's conjecture is true for almost every graph». *European J. Combin.*, 1 (1980), 195–199.

[9] Bonato, A.; Nowakowski, R. J. *The game of Cops and Robbers on graphs*. Providence. R. I.: Amer. Math. Soc. (2011). (Stud. Math. Library.)

[10] Catlin, P. A. «Hajós's graph-colouring conjecture: variations and counterexamples». *J. Combin. Theory Ser. B*, 26 (1979), 268–274.

[11] Chapuy, G.; Fusy, É.; Giménez, O.; Mohar, B.; Noy, M. «Asymptotic enumeration and limit laws for graphs of fixed genus». *J. Combin. Theory Ser. A*, 118 (2011), 748–777.

[12] Chudnovsky, M.; Robertson, N.; Seymour, P.; Thomas, R. «The strong perfect graph theorem». *Ann. Math.*, 164 (2006), 51–229.

[13] Conway, J.; Gordon, C. McA. «Knots and links in spatial graphs». *J. Graph Theory*, 7 (1983), 445–453.

[14] COURCELLE, B. «Graph rewriting: An algebraic and logic approach». A: LEEUWEN, J. VAN (ed.). *Handbook of Theoretical Computer Science*. Vol. 2. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1990, 194–242.

[15] DEMAINE, E. D.; HAJIAGHAYI, M.; KAWARABAYASHI, K. «Algorithmic graph minor theory: improved grid minor bounds and Wagner's contraction». *Algorithmica*, 54 (2009), 142–180.

[16] DIESTEL, R. *Graph theory*. 3a edició. Berlín: Springer-Verlag, 2005. (Grad. Texts in Math.; 173)

[17] DOWNEY, R. G.; FELLOWS, M. R. *Parameterized complexity*. Nova York: Springer, 1999. (Monogr. Comp. Sci.)

[18] DVOŘÁK, Z.; KRAL', D; THOMAS, R. «Testing first-order properties for subclasses of sparse graphs». arXiv:1109.5036.

[19] EPIFANOV, G. V. «Reduction of a plane graph to an edge by a star-triangle transformation». *Soviet Math. Dokl.*, 166 (1966), 13–17.

[20] FELLOWS, M. R.; LANGSTON, M. A. «Nonconstructive tools for proving polynomial-time decidability». *J. ACM*, 35 (1988), 727–739.

[21] FLAJOLET, P.; SEDGEWICK, R. *Analytic combinatorics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[22] FLUM, J.; GROHE, M. *Parameterized complexity theory*. Berlín: Springer, 2006. (Texts Theoret. Comp. Sci. EATCS Ser.)

[23] FRICK, M.; GROHE, M. «Deciding first-order properties of locally tree-decomposable structures.» *J. ACM*, 48 (2001), 1184–1206.

[24] GEELEN, J.; GERARDS, B.; WHITTLE, G. «Towards a structure theory for matrices and matroids». A: *Proc. International Congress of Mathematicians, Madrid 2006*. Vol. 3, 2006, 827–842.

[25] GIMÉNEZ, O.; NOY, M. «Asymptotic enumeration and limit laws of planar graphs». *J. Amer. Math. Soc.*, 22 (2009), 309–329.

[26] GIMÉNEZ, O.; NOY, M.; RUÉ. J. «Graphs with given 3-connected components: asymptotic enumeration and random graphs». *Random Structures Algorithms* (pendent de publicació). arXiv:0907.0376

[27] HIGMAN, G. «Ordering by divisibility in abstract algebras». *Proc. Lond. Math. Soc.*, 2 (1952), 326–336.

[28] HOLST, H. VAN DER «A polynomial-time algorithm to find a linkless embedding of a graph». *J. Combin. Theory Ser. B*, 99 (2) (2009), 512–530.

[29] JOHNSON, D. S. «The NP-completeness column: An ongoing guide [column 19]». *J. Algorithms*, 8 (1987), 285–303.

[30] KAWARABAYASHI, K.; MOHAR, B. «Some recent progress and applications in graph minor theory». *Graphs Combin.*, 23 (2007), 1–46.

[31] KAWARABAYASHI, K.; WOLLAN, P. «A shorter proof of the graph minor algorithm–the unique linkage theorem». A: *Proceedings of ACM Symposium on Theory of Computing*. Nova York: ACM, 2010, 687–694.

[32] KRUSKAL, J. B. «Well-quasi-ordering, the Tree Theorem, and Vazsonyi's conjecture.» *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95 (1960), 210–225.

[33] KURATOWSKI, K. «Sur le problème des courbes gauches en topologie». *Fund. Math.*, 15 (1930), 271–283.

[34] LOVÁSZ, L. «Graph minor theory». *Bull. Amer. Math. Soc.*, 43 (2006), 75–86.

[35] LOVÁSZ, L. «Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture». *Discrete Math.*, 2 (1972), 253–267.

[36] MOHAR, B. «A linear time algorithm for embedding graphs in an arbitrary surface». *SIAM J. Discrete Math.*, 12 (1999), 6–26.

[37] MOHAR, B. «Graph minors and graphs on surfaces». A: LAMB, J. D.; PREECE, D. A. (ed.). *Surveys in combinatorics, 2001*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; 288) 145–163.

[38] MOHAR, B.; THOMASSEN, C. *Graphs on surfaces*. Baltimore, M. D.: Johns Hopkins University Press, 2001. (Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences)

[39] NASH-WILLIAMS, C. ST. J. A. «On well-quasi-ordering finite trees». *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 59 (1963), 833–835.

[40] NESETŘIL, J.; OSSONA DE MENDEZ, P. *Structural properties of sparse graphs*. Berlín: Springer 2008. (Building bridges. Bolyai Soc. Math. Stud.; 19), 369–426.

[41] OXLEY, JAMES. *Matroid theory*. Nova York: Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, 1992.

[42] RICHTER, R. B. «Graph minors: generalizing Kuratowski's theorem». A: BEINEKE, L. W.; WILSON, R. J. (ed.). *Topics in topological graph theory*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. 81–110. (Encyclopedia Math. Appl.; 128)

[43] RINGEL, G. *Map color theorem*. Berlín: Springer, 1974.

[44] ROBERTSON, N.; SANDERS, D. P.; SEYMOUR, P.; THOMAS, R. «The four colour theorem». *J. Combin. Theory Ser. B*, 70 (1997), 2–44. [Vegeu http://people.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html per als programes usats en la prova]

[45] ROBERTSON, N.; SEYMOUR, P. «Graph minors I. Excluding a forest». *J. Combin. Theory Ser. B*, 35 (1983), 39–61.

[46] ROBERTSON, N.; SEYMOUR, P. «Graph minors – a survey». A: ANDERSON, I. (ed.). *Surveys in Combinatorics 1985*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. 153–171.

[47] ROBERTSON, N.; SEYMOUR, P. «Graph minors V. Excluding a planar graph». *J. Combin. Theory Ser. B*, 41 (1986), 92–114.

[48] ROBERTSON, N.; SEYMOUR, P. «Graph minors IV. Tree-width and well-quasi-ordering». *J. Combin. Theory Ser. B*, 48 (1990), 227–254.

[49] ROBERTSON, N.; SEYMOUR, P. «Graph minors VIII. A Kuratowski theorem for general surfaces». *J. Combin. Theory Ser. B*, 48 (1990), 255–288.

[50] Robertson, N.; Seymour, P. «Graph minors XIII. The disjoint paths problem». *J. Combin. Theory Ser. B*, 63 (1995), 65–110.

[51] Robertson, N.; Seymour, P. «Graph minors XVI. Excluding a non-planar graph». *J. Combin. Theory Ser. B*, 89 (2003), 43–76.

[52] Robertson, N.; Seymour, P. «Graph minors XX. Wagner's conjecture». *J. Combin. Theory Ser. B*, 92 (2004), 325–357.

[53] Robertson, N.; Seymour, P. «Graph minors XXIII. Nash-Williams' immersion conjecture». *J. Combin. Theory Ser. B*, 100 (2010), 181–205.

[54] Robertson, N.; Seymour, P.; Thomas, R. «Hadwiger's conjecture for K_6-free graphs». *Combinatorica*, 13 (1993), 279–361.

[55] Robertson, N.; Seymour, P.; Thomas, R. «Sachs' linkless embedding conjecture». *J. Combin. Theory Ser. B*, 64 (1995), 185–227.

[56] Seese, D. «Linear time computable problems and first-order descriptions». *Math. Structures Comput. Sci.*, 6 (1996), 505–526.

[57] Seymour, P. «How the proof of the strong perfect graph conjecture was found». *Gaz. Math.*, 109 (2006), 69–83.

[58] Tarkowski, S. «On the comparability of dendrites». *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 8 (1960), 39–41.

[59] Thomas, R. «A Menger-like property of tree-width: the finite case». *J. Combin. Theory Ser. B*, 48 (1990), 67–76.

[60] Thomas, R. «Recent excluded minor theorems for graphs». A: Lamb, J. D.; Preece, D. A. (ed.). *Surveys in combinatorics, 1999*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999, 201–222. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; 267)

[61] Thomas, R. «An update on the four-color theorem». *Notices Amer. Math. Soc.*, 45 (1998), 848–859.

[62] Thomason, A. «The extremal function for complete minors». *J. Combin. Theory Ser. B*, 81 (2001), 318–338.

[63] Thomassen, C. «A simpler proof of theexcluded minor theorem for higher surfaces». *J. Combin. Theory Ser. B*, 70 (1997), 306–311.

[64] Tutte, W. T. «Convex representations of graphs». *Proc. Lond. Math. Soc.*, 10 (1960), 304–320.

[65] Tutte, W. T. «FISH and I.» http://www.cacr.math.uwaterloo.ca/techreports/1998/corr98-39.ps

[66] Wagner, K. «Über eine Erweiterung des Satzes von Kuratowski». *Deutsche Math.*, 2 (1937), 280–285.

[67] Yannakakis, M. «Embedding planar graphs in four pages». *J. Comput. System Sci.*, 38 (1986), 36–67.

[68] Yu, Y. «More forbidden minors for Wye-Delta-Wye reducibility». *Electr. J. Combin.*, 13 (1) (2006). 15 pàg. (Research Paper; 7)

[69] Ziegler, G. *Lectures on polytopes*. Berlín: Springer, 1995. (Grad. Texts in Math., 152)

Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya
Jordi Girona, 1-3, 08034 Barcelona
marc.noy@upc.edu